УДК 531.396, 534.014.4, 534.015.1

Периг А. В., Бондаренко Е. А.

ЧИСЛЕННОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСКАЧИВАНИЯ ПОДНИМАЮЩЕГОСЯ ГРУЗА ПРИ ПОВОРОТЕ СТРЕЛОВОГО КРАНА

Практическое решение задач транспортировки грузов с применением действующего подъемно-транспортного оборудования требует корректной реализации точных управляемых движений в течение допускаемого времени, необходимого для осуществления конечных перемещений рабочего органа стрелового крана и поднимаемого груза [1–10]. Дальнейшее совершенствование конструктивно-технологических параметров и динамических режимов работы стреловых кранов требует подробного теоретического описания сложных колебательных движений в многомассовых механических системах, моделирующих исполнительный орган подъемно-транспортного механизма и перемещаемый груз [1–10]. Решению указанных задач посвящен ряд работ современных украинских [1–3] и зарубежных [4–10] исследователей. При этом получаемые системы дифференциальных уравнений движения многомассовых механических систем характеризуются высокой нелинейностью и, как результат, исключительной сложностью численного интегрирования, что требует широкого применения методов декомпозиции [11] и линеаризации [12–17] решаемых задач классической механики, а также применения систем компьютерной алгебры [18–20]. Одной из серьезнейших технологических проблем при эксплуатации стреловых кранов, приводящих к существенной потере производительности и увеличению затрачиваемого времени на осуществление целевого перемещения переносимого груза, является явление раскачивания груза при повороте стрелы работающего крана. Решению динамических задач раскачивания груза посвящены исследования Кузьмина А. Н. и др. [1], Герасимяка Р. П. и др. [3], Зарецкого А. А. и др. [4–5], Голдобиной Л. А. и др. [8], а также Подобеда В. А. [9]. Задачи динамического анализа поворота стрелы работающего крана решаются в работах Макаревича Е. В. и др. [2], а также Корытова М. С. [7]. В то же время в работах Дремова В. И. и др. [6], а также Лобова Н. А. [10] проанализированы особенности решения динамических задач, связанных с подъемом грузов. При этом необходимо отметить недостаточную изученность динамических задач, связанных с одновременным анализом колебательных движений, возникающих при подъеме перемещаемого груза, раскачивании груза по отношению к поворачивающейся стеле и учета собственно поворота стрелы крана.

Целью работы является постановка и численное решение обратной динамической задачи об установлении законов колебательных движений в механической системе «стрела крана – груз» при раскачивании поднимающегося груза по отношению к поворачивающейся стреле крана с учетом переменной длины троса в классе непрерывных функций.

Для решения поставленной задачи воспользуемся методами аналитической механики, связанными с применением уравнений Лагранжа II рода к описанию сложных движений механической системы с тремя степенями свободы (рис. 1). Пускай OC – длина стрелы крана, CM_t – переменная длина свисающей части троса, M_t – поднимающийся груз, совершающий прямолинейное движение вдоль линии M_tC и раскачивающийся в подвижной вертикальной плоскости $CM_tM_{t+1}{}^{abs}$, которая поворачивается вместе со стрелой OC, оставаясь перпендикулярной к линии стрелы OC (рис. 1).

В рассматриваемом случае абсолютное движение груза характеризуется наличием следующих компонент скоростей груза: $V_{rz} = \dot{z}$ – вертикальная проекция относительной скорости груза вдоль оси z; $V_{r\alpha} = z\dot{\alpha}$ – горизонтальная проекция относительной скорости груза вдоль оси α, где переменная длина свисающей части троса $CM_t = CM_{t+1}^{abs} = z$; $V_{e\varphi} = R\dot{\varphi}$ – горизонтальная проекция переносной скорости груза вместе со стрелой вдоль оси α , где R – длина стрелы. Принимая во внимание, что абсолютная скорость груза определяется на основании теоремы о сложении скоростей при сложном движении, устанавливаем, что $\vec{V}_{abs} = \vec{V}_{rz} + \vec{V}_{r\alpha} + \vec{V}_{e\varphi}$. При этом кинетическая энергия системы может быть определена как $T = T_{гр} + T_{стр}$, где $T_{гр} = (1/2) m_{гр} \vec{V}_{abs}^2$ – кинетическая энергия груза, а $T_{стр} = (1/2) J_{Oy} (\dot{\varphi})^2$ – кинетическая энергия вращающейся стрелы OC, где $J_{Oy} = (1/3) m_{стр} R^2$ – момент инерции стрелы крана OC (рис. 1).

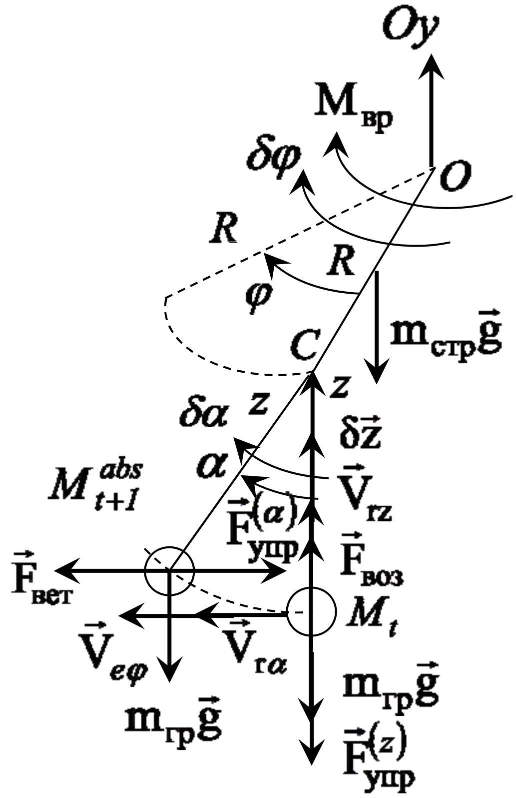

Рис. 1. Расчетная схема механической системы с тремя степенями свободы, моделирующей поворот стрелы крана на угол $q_1 = \varphi$ с одновременным подъемом $q_2 = z$ и раскачиванием $q_3 = \alpha$ груза M_t в вертикальной плоскости $CM_tM_{t+1}^{abs}$

После несложных преобразований находим, что:

$$T = (1/2) \mathrm{m}_{\text{гр}} (\dot{z})^2 + (1/2) \mathrm{m}_{\text{гр}} z^2 (\dot{\alpha})^2 + R^2 \left(\left(\mathrm{m}_{\text{гр}}/2 \right) + \left(\mathrm{m}_{\text{стр}}/6 \right) \right) (\dot{\varphi})^2 + \mathrm{m}_{\text{гр}} R z \dot{\alpha} \dot{\varphi} . \quad (1)$$

Для обобщенной координаты $q_1 = \varphi$, определяющей поворот стрелы крана, записываем соответствующее уравнение Лагранжа второго рода:

$$d(\partial T/\partial \dot{\varphi})/dt - \partial T/\partial \varphi = Q_{\varphi}^{(a)} \Big|_{\delta\alpha = \delta z = 0} = \sum \left(\delta A_k^a \right)_{\delta\varphi} \Big/ \delta\varphi \Big|_{\delta\alpha = \delta z = 0}, \quad (2)$$

где $Q_{\varphi}^{(a)}$ – обобщенная сила от действия активных сил, рассчитываемая для изохронной вариации $\delta\varphi \neq 0$ при условии $\delta\alpha = \delta z = 0$. На рис. 1 обозначен $M_{вр} = b \cdot t$ [Н·м] – вращающий момент привода стрелы крана, где b [Н·м/с] – постоянная вращения привода стрелы, экспериментально определяемая из условия $\varphi(t_1) = \varphi_1$, где t_1 – известное из эксперимента время поворота стрелы на экспериментально измеренный угол φ_1. В таком случае имеем $Q_{\varphi}^{(a)} = M_{вр} + F_{вет} \cdot R$, где $F_{вет}$ – ветровая нагрузка, действующая на стрелу. Т. о. находим, что $Q_{\varphi}^{(a)} = b \cdot t + F_{вет} \cdot R$. Посредством дополнительного расчета частных производных $\partial T/\partial\dot{\varphi}$, $\partial T/\partial\varphi$ и $d(\partial T/\partial\dot{\varphi})/dt$ от кинетической энергии системы (2), получаем первое уравнение Лагранжа, определяющее переносное движение стрелы крана:

$$\ddot{\varphi} \cdot R^2\left(m_{гр} + \left(m_{стр}/3\right)\right) + m_{гр}R\dot{z}\dot{\alpha} + m_{гр}Rz\ddot{\alpha} = bt + F_{вет} \cdot R. \tag{3}$$

Для обобщенной координаты $q_2 = z$, определяющей относительное вертикальное перемещение груза при подъеме, записываем следующее уравнение Лагранжа:

$$d\left(\partial T/\partial\dot{z}\right)/dt - \partial T/\partial z = Q_z^{(a)}\Big|_{\delta\alpha=\delta\varphi=0} = \sum\left(\delta A_k^a\right)_{\delta z}/\delta z\Big|_{\delta\alpha=\delta\varphi=0}, \tag{4}$$

где $Q_z^{(a)}$ – обобщенная сила от действия активных сил, рассчитываемая для изохронной вариации $\delta z \neq 0$ при условии $\delta\alpha = \delta\varphi = 0$. На рис. 1 обозначена $F_{воз} = \mathrm{a} \cdot t$ [Н] – подъемная сила, действующая на груз, где a [Н/с] – постоянная подъемной силы, экспериментально определяемая из условия $z(t_1) = z_1$, где t_1 – известное из эксперимента время подъема груза на экспериментально измеренную высоту z_1. В таком случае имеем $Q_z^{(a)} = F_{воз} - F_{упр}^{(z)} - m_{гр}g$, где $F_{упр}^{(z)} = cz$ – сила упругости каната, поднимающего груз. Т. о. находим, что $Q_z^{(a)} = a \cdot t - cz - m_{гр}g$. Посредством дополнительного расчета частных производных $\partial T/\partial\dot{z}$, $\partial T/\partial z$ и $d(\partial T/\partial\dot{z})/dt$ от кинетической энергии системы (2), получаем второе уравнение Лагранжа, определяющее относительный подъем груза:

$$\ddot{z} - (\dot{\alpha})^2 z - R\dot{\alpha}\dot{\varphi} + \left(c/m_{гр}\right)z = \left(\mathrm{a} \cdot \mathrm{t}/m_{гр}\right) - g. \tag{5}$$

Для обобщенной координаты $q_3 = \alpha$, определяющей относительный поворот груза в соприкасающейся вертикальной плоскости $\left(CM_t M_{t+1}^{abs}\right)$ по отношению к вертикали CM_t при его раскачивании, записываем соответствующее уравнение Лагранжа:

$$d\left(\partial T/\partial\dot{\alpha}\right)/dt - \partial T/\partial\alpha = Q_{\alpha}^{(a)}\Big|_{\delta\varphi=\delta z=0} = \sum\left(\delta A_k^a\right)_{\delta\alpha}/\delta\alpha\Big|_{\delta\varphi=\delta z=0}, \tag{6}$$

где $Q_{\alpha}^{(a)}$ – обобщенная сила от действия активных сил, рассчитываемая для изохронной вариации $\delta\alpha \neq 0$ при условии $\delta\varphi = \delta z = 0$. В данном случае при некотором угле $\alpha \neq 0$ (рис. 1) имеем $Q_{\alpha}^{(a)} = z \cdot \left(\left(F_{вет} - F_{упр}^{(\alpha)}\right) \cdot \cos\alpha - m_{гр}g \cdot \sin\alpha\right)$, где $F_{вет}$ – ветровая нагрузка, действующая на груз, а $F_{упр}^{(\alpha)} = cz\alpha$ – сила упругости каната в трансверсальном направлении, характеризующая упругие свойства каната подъемника при относительном раскачивании груза. Т. о. находим, что $Q_{\alpha}^{(a)} = F_{вет}z \cdot \cos\alpha - m_{гр}gz \cdot \sin\alpha - cz^2\alpha \cdot \cos\alpha$. Посредством дополнительного расчета частных производных $\partial T/\partial\dot{\alpha}$, $\partial T/\partial\alpha$ и $d(\partial T/\partial\dot{\alpha})/dt$ от кинетической энергии системы (2), получаем третье уравнение Лагранжа, определяющее относительное раскачивание груза по отношению к поворачивающейся стреле крана при одновременном подъеме груза:

$$(\ddot{\alpha}) \cdot z^2 + 2z\dot{z}\dot{\alpha} + R\dot{z}\dot{\varphi} + Rz\ddot{\varphi} = -gz \cdot \sin\alpha + \left(F_{вет} \cdot z/m_{гр}\right) \cdot \cos\alpha - \left(c/m_{гр}\right)z^2\alpha \cdot \cos\alpha. \tag{7}$$

В рамках иллюстрации разработанной математической модели, осуществим снижение числа степеней свободы в системе уравнений (1), (3), (7) и рассмотрим несколько важных частных случаев движения анализируемой системы. На первом этапе анализа рассмотрим случай равномерного подъема груза M_t вдоль вертикали и положим априори, что:

$$z = z_0 - V_0 \cdot t, \tag{8}$$

где z_0 – начальная длина свисающей части троса, $\dot{z} = V_0 = const$ – постоянная скорость подъема груза. Численное решение системы (1), (3), (7)–(8) проиллюстрировано на рис. 2–3 для следующих числовых данных: масса поднимаемого груза $m_{гр} = 20 \cdot 10^3$ кг, масса стрелы крана $m_{стр} = 19{,}2 \cdot 10^3$ кг, коэффициент жесткости троса $c = 4 \cdot 10^6$ Н/м, $g = 9{,}81$ м/с^2, $L = 45$ м, $R = 15$ м, $z_0 = L–R = 30$ м, $F_{вет} = 4 \cdot 10^3$ Н, $V_0 = 0{,}25$ м/с, $a = 1{,}635 \cdot 10^3$ Н/с, $b = 0{,}15 \cdot 10^{-3}$ Н·м/с.

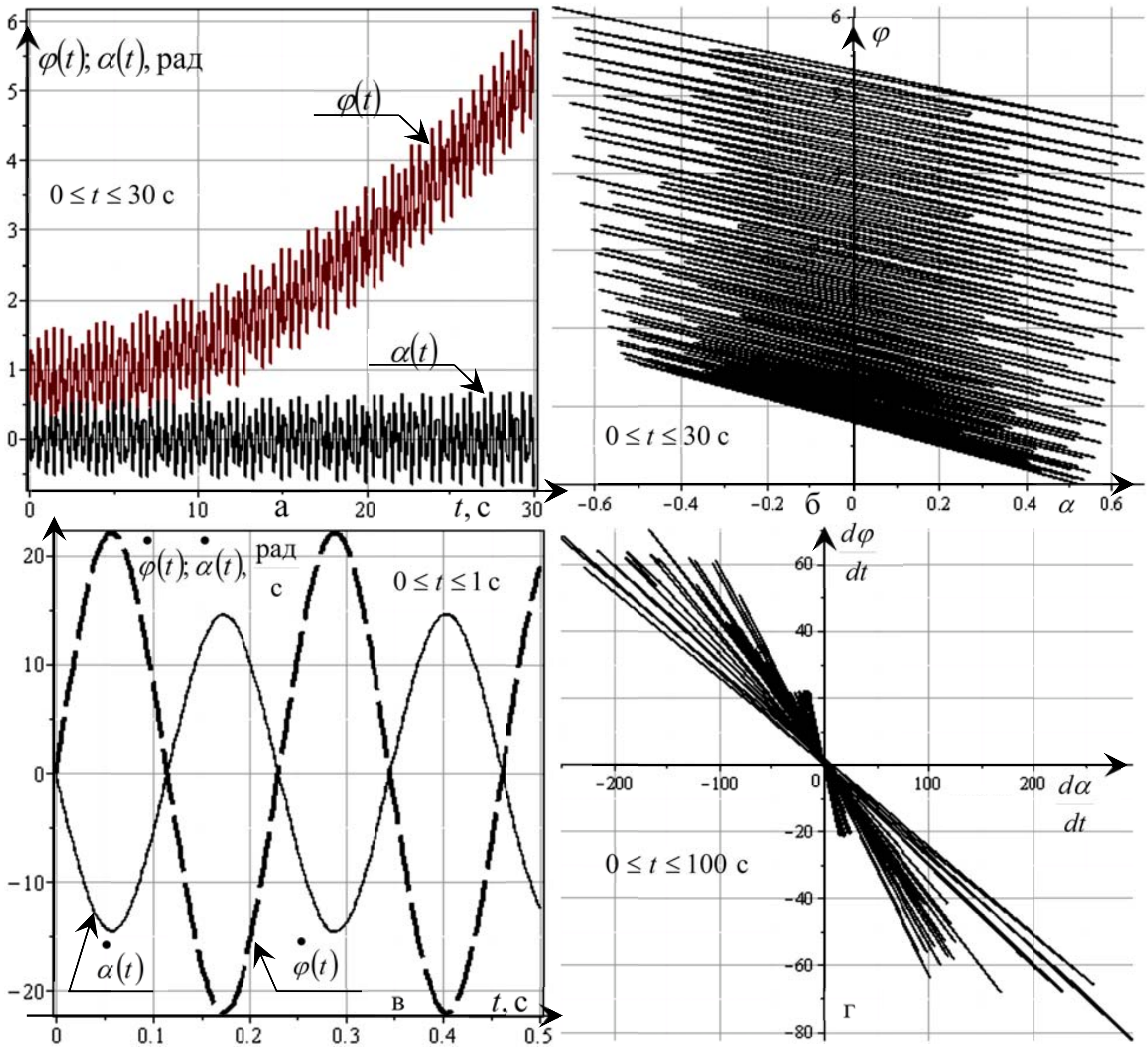

Рис. 2. Результаты численного интегрирования системы ОДУ II порядка (1), (3), (7) при исключении степени свободы $q_2 = z$ посредством линеаризации зависимости $z = z(t)$ согласно (8), т. е. в случае равномерного подъема груза на канате ($dz/dt = const$; $d^2z/dt^2 = 0$):

а – временные зависимости углов раскачивания $\alpha = \alpha(t)$ и поворота стрелы крана $\varphi = \varphi(t)$ для $0 \le t \le 30$ с; б – численное решение системы ОДУ (1), (3), (7) на плоскости $\alpha - \varphi$ для $0 \le t \le 30$ с; в – временные зависимости угловых скоростей раскачивания $d(\alpha(t))/dt$ и поворота стрелы $d(\varphi(t))/dt$ для $0 \le t \le 1$ с; г – решение на плоскости $d(\alpha(t))/dt - d(\varphi(t))/dt$ для $0 \le t \le 100$ с

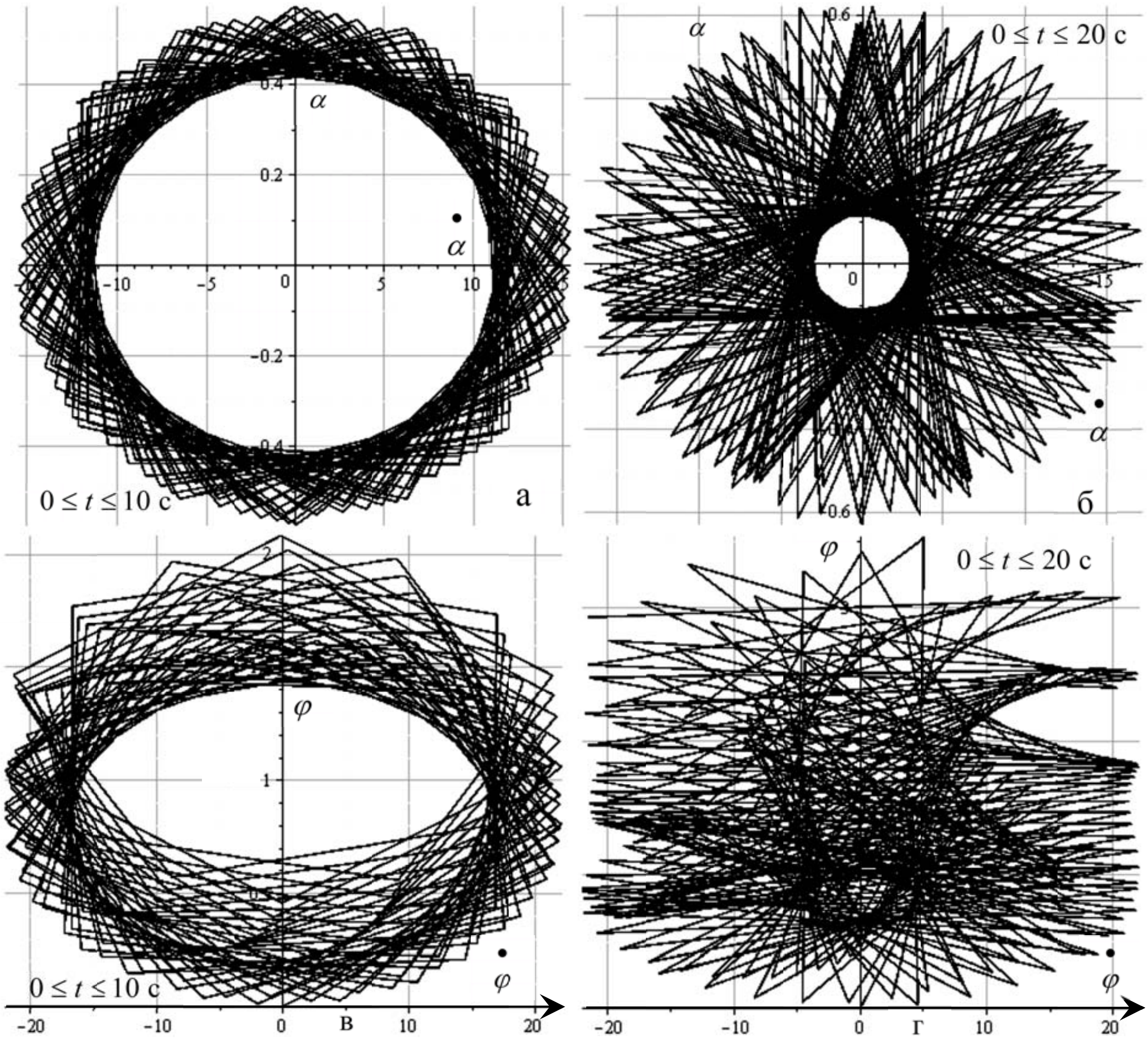

Рис. 3. Характер изменения во времени фазовых портретов системы (1), (3), (7)–(8) на плоскостях $d\alpha/dt - \alpha$ (а, б) и $d\varphi/dt - \varphi$ (в, г) для $0 \le t \le 10$ с (а, в) и для $0 \le t \le 20$ с (б, г)

Совместный анализ численного решения системы (1), (3), (7)–(8) на рис. 2–3 показывает, что при сопоставимых массах стрелы крана и поднимаемого груза в случае равномерного подъема груза на протяжении первых 50 с движения фазовый портрет системы для угла раскачивания α претерпевает последовательные трансформации (рис. 3, а, б), сохраняя форму расширяющихся концентрических эллипсов. При этом фазовый портрет системы для угла φ поворота стрелы принимает спиралевидную форму (рис. 3, в, г). Также отметим, что с возрастанием времени t имеет место возрастание периодов колебаний как для угла раскачивания α, так и для угла поворота стрелы крана φ (рис. 2, а, б). Как следует из рис. 2, а и рис. 3, а, б, с увеличением времени t происходит незначительное возрастание амплитуды колебаний для угла раскачивания $\alpha(t)$ и существенное увеличение амплитуды колебаний для угла поворота стрелы крана $\varphi(t)$.

ВЫВОДЫ

С применением уравнений Лагранжа II рода к анализу движения механической системы «стрела крана – груз», характеризующейся тремя степенями свободы, в рамках применения непрерывных функций в работе получены динамические уравнения движения, описывающие колебания, возникающие при раскачивании поднимающегося груза по отношению к поворачивающейся стреле крана с учетом переменной длины троса.

Полученные численные решения позволяют определить собственные частоты, амплитуды, законы движения и скорости тел механической системы «стрела крана – груз».

Предложенная математическая модель найдет дальнейшее развитие к описанию движения механических систем «стрела крана – груз» с учетом вылета стрелы крана, переносного перемещения платформы стрелового крана, а также наличия случайной ветровой нагрузки в классе непрерывных и разрывных функций.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кузьмин А. Н. Исследование колебаний груза на гибком подвесе при повороте крана / А. Н. Кузьмин, В. В. Суглобов, В. И. Федун // Захист металургійних машин від поломок : зб. наук. пр. – Маріуполь : ПДТУ. – 2011. – Вип. 13. – С. 141–147.

2. Разработка оптимального управления движениями башенного крана / Е. В. Макаревич, В. Н. Шамардина, Ф. Палис, С. Палис // Електротехнічні та комп'ютерні системи : науково-технічний журнал. – Одеса : ОНПУ, 2011. – № 3. – С. 170–171.

3. Герасимяк Р. П. Особливості керування електроприводом механізму вильоту стріли під час обертання крана з підвішеним вантажем / Р. П. Герасимяк, О. В. Найденко // Електротехнічні та комп'ютерні системи : науково-технічний журнал. – Одеса : ОНПУ, 2007. – Випуск 68. – С. 11–15.

4. Управление и защита грузоподъемного крана с гашением раскачивания груза. Часть 1 / А. А. Зарецкий, Л. С. Каминский, Д. М. Маш, И. А. Пятницкий, И. Г. Фёдоров // Журнал «Все Краны». – Санкт-Петербург : Кран-Сервис, 2007. – № 16/16 (декабрь). – С. 10–13.

5. Управление и защита грузоподъемного крана с гашением раскачивания груза. Часть 2 / А. А. Зарецкий, Л. С. Каминский, Д. М. Маш, И. А. Пятницкий, И. Г. Фёдоров // Журнал «Все Краны». – Санкт-Петербург : Кран-Сервис, 2008. – № 01/17 (январь-февраль). – С. 8–12.

6. Дремов В. И. К вопросу о создании энергоэффективных отечественных мощных грузоподъемных средств для условий природно-техногенных катаклизмов / В. И. Дремов, В. Г. Ивахник, А. В. Ляхомский // Горный информационно-аналитический бюллетень. – М. : МГГУ, 2005. – № 6. – С. 274–278.

7. Корытов М. С. О перемещении груза автокраном вдоль заданной траектории при ограничении количества одновременно управляемых координат / М. С. Корытов // Вестник Самарского государственного технического университета. – Самара : СамГТУ, 2009. – № 2 (24). – С. 105–112. – (Серия «Технические науки»).

8. Голдобина Л. А. Теоретическое обоснование снижения раскачивания груза на канате строительного крана / Л. А. Голдобина, А. В. Власов, А. Л. Бочков // Технико-технологические проблемы сервиса. – Санкт-Петербург : СПбГУСЭ, 2011. – Т. 2. – № 16. – С. 52–60.

9. Подобед В. А. Теоретические исследования основных показателей работы портального крана «Альбрехт» при динамическом воздействии ветра / В. А. Подобед // Вестник Мурманского государственного технического университета. – Мурманск : МГТУ, 2006. – Т. 9. – № 3. – С. 522–530.

10. Лобов Н. А. Динамика грузоподъемных кранов / Н. А. Лобов. – М. : Машиностроение, 1987. – 156 с.

11. Зав'ялова Л. І. Вплив розміщення колісних осей на область стійкості прямолінійного руху багатовісного автомобіля / Л. І. Зав'ялова, О. В. Періг, О. О. Лагошна // Збірник наукових праць ПНТУ ім. Ю. Кондратюка. – 2005. – № 16. – С. 88–93. – (Серія «Галузеве машинобудування, будівництво»).

12. Бондаренко А. А. Теоретична механіка : підручник. У 2-х ч. Ч. 2 / А. А. Бондаренко, О. О. Дубінін, О. М. Переяславцев // Динаміка. – К. : Знання, 2004. – 590 с.

13. Кільчевський М. О. Курс теоретичної механіки : підручник. У 2-х т. Т. 2. / М. О. Кільчевський // Динаміка системи. – К. : Київ. ун-т, 2009. – 447 с.

14. Поляхов Н. Н. Теоретическая механика / Н. Н. Поляхов, С. А. Зегжда, М. П. Юшков. – М. : Высш. шк., 2-е изд, 2000. – 592 с.

15. José J. V. Classical Dynamics / J. V. José, E. J. Saletan. – N.-Y. : CUP, 1998. – 696 pp.

16. Johns O. Analytical Mechanics / O. Johns. – Oxford : OUP, 2005. – 597 pp.

17. Scheck F. Mechanics / F. Scheck. – Berlin : Springer, 2010. – 547 pp.

18. Щодо можливостей застосування відкритих систем комп'ютерної алгебри до інтегрування рівнянь згасаючих коливань / О. В. Періг, Л. І. Зав'ялова, І. А. Матвєєв, А. В. Кисіль // Збірник наукових праць ПНТУ. – 2012. – Т. 1. – № 2(32). – С. 242–250. – (Серія «Галузеве машинобудування, будівництво»).

19. Матвеев И. А. О возможностях решения задач Коши в открытых системах компьютерной алгебры / И. А. Матвеев, А. В. Периг // Інформатика, математика, автоматика (ІМА : 2012) : Матеріали та програма НТК (Суми, 16–21 квітня 2012 року). – Суми : Сумський державний університет, 2012. – С. 209.

20. Застосування вільних математичних пакетів до розв'язання задач теоретичної механіки / О. В. Періг, А. В. Кисіль, І. А. Матвєєв, Д. Ю. Міхєєнко // FOSS Lviv 2012 (Львів, 26–28 квітня 2012 року) : Друга міжнародна науково-практична конференція FOSS Lviv 2012 : збірник наукових праць ; під ред. Г. Г. Злобін, С. Є. Апуневич, С. В. Апуневич, Д. Є. Ванькевич. – Львів : ЛНУ ім. І. Франка, 2012. – С. 86–89.

Статья поступила в редакцию 05.06.2012 г.